

czyli

$$-\frac{R^* \dot{X}l}{F} + \alpha_T (T_1 + T_2) \frac{l}{2} = \int_s \frac{R^* \dot{M}}{J} M_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \frac{R^* \dot{N}}{F} N_1 ds + \int_s (\varepsilon_T) N_1 ds$$

gdzie

$$\dot{M} = \dot{X}M_1, \quad \dot{N} = \dot{X}N_1$$

Otrzymujemy więc

$$-\frac{R^* \dot{X}l}{F} + \alpha_T (T_1 + T_2) \frac{l}{2} = R^* \dot{X} \left( \int_s \frac{M_1 M_1}{J_2} ds + \int_s \frac{N_1 N_1}{F} ds \right) + \delta_T + \delta_T'$$

$$R^* \dot{X} \left( \frac{l}{F} + \frac{5l^2}{3J} + \frac{l}{F} \right) = \alpha_T (T_1 + T_2) \frac{l}{2} + \frac{\alpha_T 2l^2}{h} (T_1 - T_2) - \alpha_T (T_1 + T_2) \frac{l}{2}$$

$$R^* \dot{X} = \frac{\alpha_T 2l^2}{h} (T_1 - T_2) \left( \frac{2l}{F} + \frac{5l^3}{3J} \right)^{-1}$$

Stosując transformację Laplace'a otrzymamy

$$\bar{R}(p) \cdot p\bar{X}(p) = \frac{1}{p} \left[ \frac{\alpha_T 2l^2}{h} (T_1 - T_2) \right] \left( \frac{2l}{F} + \frac{5l^3}{3J} \right)^{-1}$$

$$\bar{X}(p) = \frac{1}{p^2} \frac{1}{\bar{R}(p)} \left[ \frac{\alpha_T 2l^2}{h} (T_1 - T_2) \right] \left( \frac{2l}{F} + \frac{5l^3}{3J} \right)^{-1}$$

Przyjęliśmy w zadaniu stacjonarny przepływ ciepły określony równaniem  $T_1(t) - T_2(t) = (\dot{T}_1 - \dot{T}_2)H(t)$ , gdzie  $H(t)$  jest funkcją Heaviside'a.

Wprowadzając funkcję modyfikującą  $r(t)$  w postaci  $\bar{r}(p) = \frac{1}{\bar{R}(p)}$  mamy

$$X(t) = t^* r(t) \left[ \frac{\alpha_T 2l^2}{h} (\dot{T}_1 - \dot{T}_2) \right] \left( \frac{2l}{F} + \frac{5l^3}{3J} \right)^{-1}$$

Dla ramy żelbetowej poddanej działaniu temperatury funkcja  $\dot{X}(t)$  przyjmie postać

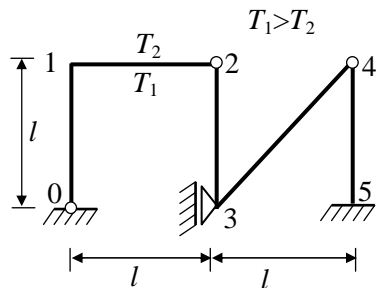
$$\begin{aligned}
X(t) = & \int_0^t \tau * \frac{1}{E_b} \left\langle \frac{1}{1+\mu} \left\{ E_b \left[ -\gamma(1+E_b C_0) e^{-\gamma(1+E_b C_0)(t-\tau)} + \left(1 - \frac{1}{1+E_b C_0}\right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{1+E_b C_0} \delta(t-\tau) \right] + \mu E_2 \delta(t-\tau) \right\} + \frac{1}{1+\mu} \left[ E_b \left(1 - \frac{1}{1+E_b C_0}\right) \right] \right. \\
& \left. \cdot \delta(t-\tau) \right\rangle d\tau \cdot \left[ \frac{\alpha_T 2l^2}{h} (\dot{T}_1 - \dot{T}_2) \right] \left( \frac{2l}{F} + \frac{5l^3}{3J} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

W podanym wzorze  $E_b$ ,  $C_0$ ,  $\gamma$  są stałymi określającymi reologiczne właściwości betonu,  $\mu$  - udziałem uzbrojenia,  $E_2$  - modułem sprężystości stalowych wkładek. Po wykonaniu całkowania otrzymujemy zmienny w czasie rozkład sił wewnętrznych wywołany stacjonarnym przepływem ciepła w ramie żelbetowej. Założono przy tym, że beton opisany może być równaniami liniowej lepkości sprężystości, natomiast stal posiada właściwości sprężyste.

Wykresy wielkości wewnętrznych są analogiczne jak w zadaniu liniowo sprężystym.

### ZADANIE 3.16.

W podanym układzie prętowym (jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym) należy wyznaczyć rozkłady funkcji momentów zginających, sił poprzecznych i sił osiowych wywołanych działaniem stacjonarnego pola temperatur. Schemat zadania oraz pole temperatur przedstawiono na rys. 3.16a



Rys. 3.16a

Obliczenia należy wykonać dla materiału:

- a) **liniowo-sprężystego**  $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- b) **nieliniowo-sprężystego**  $\sigma = A \cdot \varepsilon^N$
- c) **liniowo lepkosprężystego**  $\sigma = R * d\varepsilon$

Wyniki obliczeń należy ze sobą porównać

Dane:  $l$  – długość,  $T_1, T_2, \alpha_T$  – współczynnik rozszerzalności cieplnej,  $E, N, R(t), A$  – współczynniki charakteryzujące właściwości mechaniczne w podanym zestawie różnych materiałów.

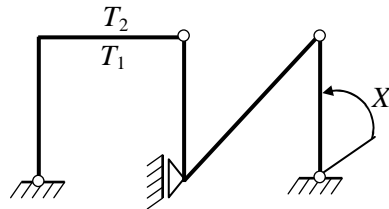
**Rozwiązanie:**

W przedstawionym zadaniu siły przekrojowe i moment hiperstatyczny wyznaczmy wykorzystując całkę Mohra, której niezmiennicza postać przyjmie formę zależności

$$\int_s (\kappa_M + \kappa_T) M_1 ds + \int_s (\varepsilon_M + \varepsilon_T) N_1 ds = 0$$

gdzie  $\kappa_M$  i  $\kappa_T$  są zmianami krzywizn następującymi w wyniku stanu naprężenia i przyrostu temperatury, a  $\varepsilon_M$  i  $\varepsilon_T$  są wydłużeniami wywołanymi przez pole naprężeń i średnią wartość temperatur w przekroju. Występujące w całce Mohra funkcje  $M_1$  i  $N_1$  są osiowymi w zadanym układzie prętowym, które wynikają z działania jednostkowego momentu przyłożonego w punkcie 5.

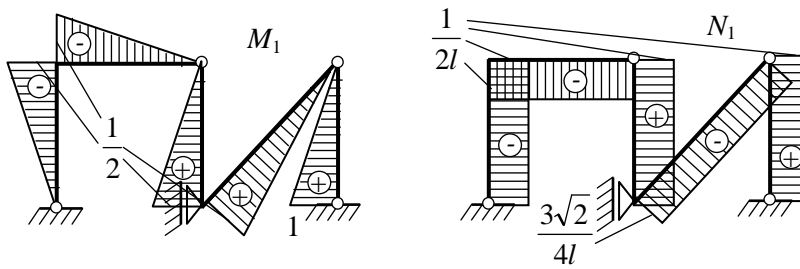
Przedstawione zadanie jest równoważne następującemu zadaniu statycznie wyznaczalnemu.



Rys. 3.16b

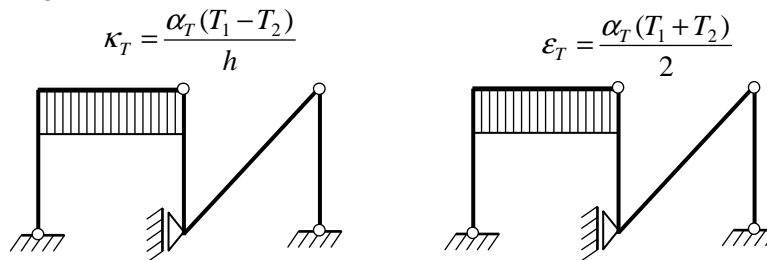
Moment hiperstatyczny  $X$  musi być tak dobrany, aby jego łączne działanie wraz z polem temperatur nie wywoływały obrotu w punkcie 5.

Funkcje  $M_1$  i  $N_1$  (momentów zginających i sił osiowych od momentu jednostkowego) są niezależne od opisu materiału. Wykresy tych funkcji mają postać



Rys. 3.16c

Wydłużenia oraz zmiany krzywizn spowodowane działaniem pola termicznego



Rys. 3.16d

a) **Materiał liniowo-sprężysty**

Materiał liniowo-sprężysty opisany jest równaniem  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  co prowadzi do następujących wyrażeń na krzywiznę  $\kappa_M$  i wydłużenie  $\varepsilon_M$  w układzie

$$\kappa_M = \frac{M}{EJ}, \quad \varepsilon = \frac{N}{EF}$$

gdzie  $M$  jest funkcją momentów zginających wywołanych działaniem wszystkich sił w układzie, a  $N$  funkcją sił osiowych od wszystkich sił w układzie. Zależność przyjmie postać

$$\int_s \frac{M \cdot M_1}{EJ} ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \frac{NN_1}{EF} ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds = 0$$

Funkcję momentów zginających  $M$  i sił osiowych  $N$  można przedstawić jako

$$M = X \cdot M_1, \quad N = X \cdot N_1$$

a równanie statyki (3) w sposób następujący

$$X \left( \int_s \frac{M_1 M_1}{EJ} ds + \int_s \frac{N_1 N_1}{EF} ds \right) + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds = 0$$

Wartości całek w równaniu wyznaczmy posługując się uproszczonym sposobem Mohra-Wereszczagina.

W wyniku przeliczeń otrzymamy

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot l \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12EJ}$$

$$\delta'_{11} = \frac{1}{EF} \left( 4 \cdot \frac{1}{2l} \cdot l \cdot \frac{1}{2l} + \frac{3\sqrt{2}}{4l} \cdot l \sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4l} \right) = \frac{9\sqrt{2} + 8}{8lEF}$$

$$\delta_T = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \alpha_T \frac{T_1 - T_2}{h} = -\frac{\alpha_T l (T_1 - T_2)}{4h}$$

$$\delta'_T = \frac{1}{2l} \cdot l \cdot \alpha_T \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{4}$$

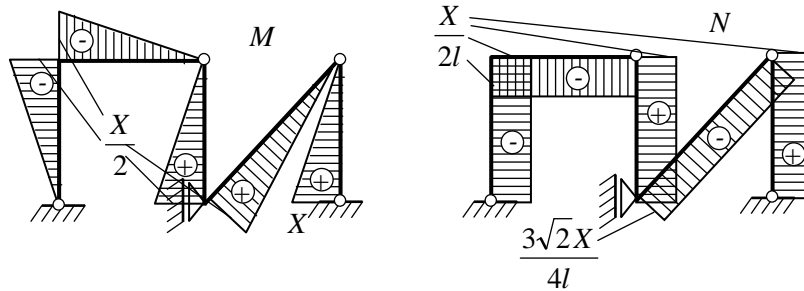
gdzie  $h$  – wysokość przekroju.

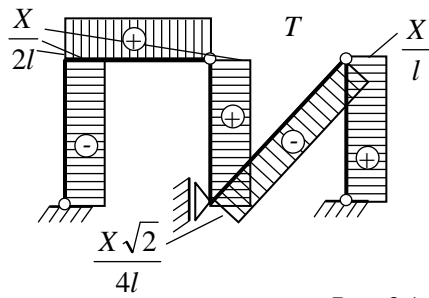
Uzyskane wyniki wstawiamy do równania

$$X \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12EJ} + \frac{8 + 9\sqrt{2}}{8lEF} \right] - \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) + \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) = 0$$

$$X = \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \right] \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12EJ} + \frac{8 + 9\sqrt{2}}{8lEF} \right]^{-1}$$

Znajomość siły hiperstatycznej  $X$  pozwala na sporządzenie wykresów wielkości wewnętrznych





Rys. 3.16e

b) **Materiał nieliniowo-sprężysty**

Wykresy momentów  $M_1$  i sił osiowych  $N_1$  od momentu jednostkowego  $X = 1$  oraz wykresy termicznych wydłużeń i zmian krzywizn będą identyczne jak w zadaniu liniowo-sprężystym. Ulegną zmianie natomiast wydłużenia i zmiany krzywizn wywołane przez moment hiperstatyczny  $X$ .

Można je wyrazić przy pomocy wzorów

$$\varepsilon = \left( \frac{N}{AF} \right)^n, \quad \kappa = \left( \frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n$$

Uwzględniając te zależności możemy zapisać

$$\int_s \left[ \frac{M}{AJ(N+1)} \right]^n M_1 ds + \int_s \left[ \frac{N}{AF} \right]^n N_1 ds + \delta_T + \delta_T' = 0$$

$$\int_s \frac{X^n M_1^n}{[AJ(N+1)]^n} M_1 ds + \int_s \frac{X^n N_1^n}{(AF)^n} N_1 ds + \left( -\frac{\alpha_T l (T_1 - T_2)}{4h} \right) + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{4} = 0$$

$$X^n \left( \int_s \frac{M_1^n M_1}{[AJ(N+1)]^n} ds + \int_s \frac{N_1^n N_1}{(AF)^n} ds \right) = \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2)$$

$$\begin{aligned}
& X^n \left[ 3 \int_0^l \frac{\left(\frac{1}{2l} s\right)^n \cdot \frac{1}{2l} \cdot s}{[AJ(N+1)]^n} ds + \int_0^{l\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4l} s\right)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{4l} \cdot s}{[AJ(N+1)]^n} ds + \int_0^l \frac{\left(1 - \frac{1}{l} \cdot s\right)^n \left(1 - \frac{1}{l} \cdot s\right)}{[AJ(N+1)]^n} ds + \right. \\
& \left. + 4 \int_0^l \frac{\left(\frac{1}{2l}\right)^n \frac{1}{2l}}{(AF)^n} ds + \int_0^{l\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4l}\right)^n \frac{3\sqrt{2}}{4l}}{(AF)^n} ds \right] = \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \\
& X^n \left( \frac{3l^{n+2}}{(2l)^{n+1} (n+2)[AJ(N+1)]^n} + \frac{(\sqrt{2})^{n+1} (l\sqrt{2})^{n+2}}{(4l)^{n+1} (n+2)[AJ(N+1)]^n} + \right. \\
& \left. + \frac{l}{(n+2)[AJ(N+1)]^n} + \frac{4l}{(2l)^{n+1} (AF)^n} + \frac{(3\sqrt{2})^{n+1} l\sqrt{2}}{(4l)^{n+1} (AF)^n} \right) = \\
& = \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \\
& X = \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \right]^N \left[ \frac{3l^{n+2}}{(2l)^{n+1} (n+2)[AJ(N+1)]^n} + \right. \\
& \left. + \frac{(\sqrt{2})^{n+1} (l\sqrt{2})^{n+2}}{(4l)^{n+1} (n+2)[AJ(N+1)]^n} + \frac{l}{(n+2)[AJ(N+1)]^n} + \frac{4l}{(2l)^{n+1} (AF)^n} + \right. \\
& \left. + \frac{(3\sqrt{2})^{n+1} l\sqrt{2}}{(4l)^{n+1} (AF)^n} \right]^{-N}
\end{aligned}$$

Z porównania rozwiązań w zadaniu liniowym i nieliniowym możemy tak dobrać wartość „modułu siecznego” w zadaniu nieliniowym, aby rozwiązania w obu zadaniach były identyczne.

Porównując siły  $X$  z rozwiązań liniowego i nieliniowego mamy

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \right] \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12EJ} + \frac{8 + 9\sqrt{2}}{8IEF} \right]^{-1} = \\
& = \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \right]^N \cdot \left[ \frac{3l^{n+2}}{(2l)^{n+1} (n+2) [AJ(N+1)]^n} + \right. \\
& + \frac{(\sqrt{2})^{n+1} (l\sqrt{2})^{n+2}}{(4l)^{n+1} (n+2) [AJ(N+1)]^n} + \frac{l}{(n+2) [AJ(N+1)]^n} + \frac{4l}{(2l)^{n+1} (AF)^n} + \\
& \left. + \frac{(3\sqrt{2})^{n+1} l\sqrt{2}}{(4l)^{n+1} (AF)^n} \right]^N \\
E & = \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \right]^{N-1} \left[ \frac{3l^{n+2}}{(2l)^{n+1} (n+2) [AJ(N+1)]^n} + \right. \\
& + \frac{(\sqrt{2})^{n+1} (l\sqrt{2})^{n+2}}{(4l)^{n+1} (n+2) [AJ(N+1)]^n} + \frac{l}{(n+2) [AJ(N+1)]^n} + \frac{4l}{(2l)^{n+1} (AF)^n} + \\
& \left. + \frac{(3\sqrt{2})^{n+1} l\sqrt{2}}{(4l)^{n+1} (AF)^n} \right]^{-N} \cdot \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12J} + \frac{8 + 9\sqrt{2}}{8IF} \right]
\end{aligned}$$

Z równania tego wynika, że zastępczy moduł sieciowy zależy nie tylko od rozkładów temperatury, ale także od konfiguracji układu.

### c) Materiał lepko-sprężysty

Przy analizie materiału lepko-sprężystego równania fizyczne mają postać

$$\sigma = \int_0^t \phi(t - \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau = \phi * \dot{\epsilon}$$

$\phi(t)$  - jest funkcją relaksacji,  $\dot{\epsilon}(t)$  - prędkością odkształceń, \* - symbolem splotu.

Wydłużenia i krzywizny wyrażają się wzorami

$$\varepsilon = \frac{\dot{N} * R}{F}, \quad \kappa = \frac{\dot{M} * R}{J}$$

dla równania fizycznego

$$\varepsilon = \int_0^t R(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$



Równanie przyjmie postać

$$\int_s \frac{R^* \dot{M}}{J} M_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \frac{R^* \dot{N}}{F} N_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds = 0$$

gdzie

$$\dot{M} = \dot{X}M_1, \quad \dot{N} = \dot{X}N_1$$

Otrzymujemy więc

$$R^* \dot{X} \left( \int_s \frac{M_1 M_1}{J} ds + \int_s \frac{N_1 N_1}{F} ds \right) + \delta_T + \delta_T' = 0$$

$$R^* \dot{X} \left( \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12J} + \frac{9\sqrt{2} + 8}{8lF} \right) = \frac{\alpha_T l (T_1 - T_2)}{4h} - \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{4}$$

$$R^* \dot{X} = \left[ \frac{\alpha_T l (T_1 - T_2)}{4h} - \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{4} \right] \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12J} + \frac{9\sqrt{2} + 8}{8lF} \right]^{-1}$$

Stosując transformację Laplace'a dostajemy

$$\bar{R}(p) \cdot p \bar{X}(p) = \frac{1}{p} \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \alpha_T \frac{(T_1 + T_2)}{4} \right] \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12J} + \frac{9\sqrt{2} + 8}{8lF} \right]^{-1}$$

$$\bar{X}(p) = \frac{1}{\bar{R}(p)} \frac{1}{p} \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \alpha_T \frac{(T_1 + T_2)}{4} \right] \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12J} + \frac{9\sqrt{2} + 8}{8lF} \right]^{-1}$$

W zadaniu przyjęto stacjonarny przepływ ciepły określony równaniem  $T_1(t) - T_2 = (\dot{T}_1 - \dot{T}_2)H(t)$ , gdzie  $H(t)$  jest funkcją Heaviside'a.

Wprowadzając funkcję modyfikacyjną  $r(t)$ , przy czym  $\bar{r}(p) = \frac{1}{R(p)}$

mamy

$$X(t) = t * r(t) \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \right] \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12J} + \frac{9\sqrt{2} + 8}{8lF} \right]^{-1}$$

Dla ramy żelbetowej poddanej działaniu temperatury funkcja  $X(t)$  przyjmie postać

$$X(t) = \int_0^t \tau \frac{1}{E_b} \left\langle \frac{1}{1+\mu} \left\{ E_b \left[ -\gamma(1+E_b C_0) e^{-\gamma(1+E_b C_0)(t-\tau)} + \left(1 - \frac{1}{1+E_b C_0}\right) + \frac{1}{1+E_b C_0} \delta(t-\tau) \right] + \mu E_2 \delta(t-\tau) \right\} + \frac{1}{1+\mu} \left\{ E_b \left(1 - \frac{1}{1+E_b C_0}\right) \right\} \delta(t-\tau) \right\rangle d\tau \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{\alpha_T l}{4h} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha_T}{4} (T_1 + T_2) \right] \left[ \frac{(7 + \sqrt{2})l}{12J} + \frac{9\sqrt{2} + 8}{8IF} \right]^{-1}$$

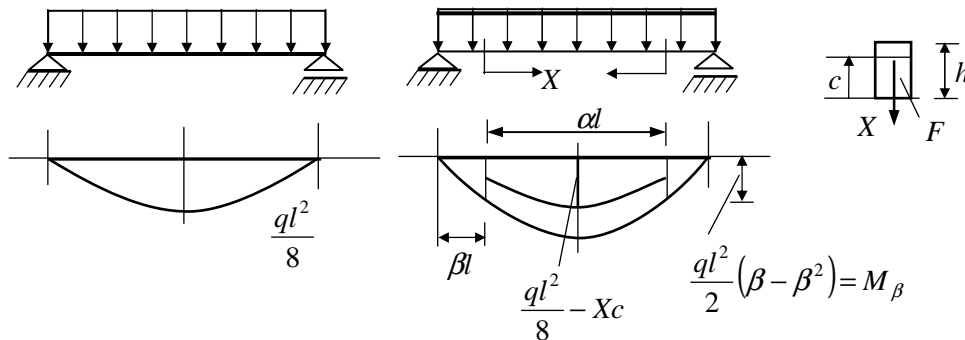
$E_b$ ,  $C_0$ ,  $\gamma$  - są stałymi określającymi reologiczne właściwości betonu,  $\mu$  - udział uzbrojenia,  $E_2$  - moduł sprężystości stalowych wkładek.

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy zmienny w czasie rozkład sił przekrojowych wywołany stacjonarnym przepływem ciepła w ramie żelbetowej. Założono przy tym, że beton może być opisany równaniami liniowej lepkosprężystości, natomiast stal posiada właściwości sprężyste.

Wykresy sił przekrojowych są takie same jak w zadaniu liniowo-sprężystym.

### ZADANIE 3.17.

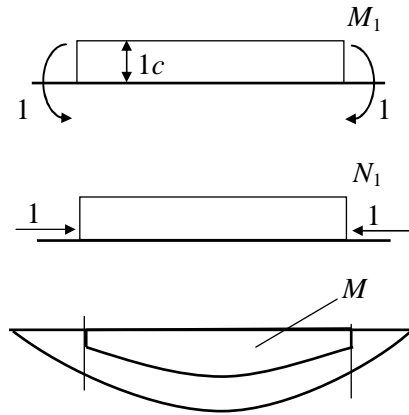
W związku ze zmianą obciążenia  $q_0 \rightarrow q$  belki wolnopodpartej o symetrycznym przekroju poprzecznym należy ją wzmocnić dokonując wstępnego sprężenia na części belki o długości  $(\alpha l)$ . Należy dobrać w taki sposób wstępne napięcie w cięgnie sprężającym, aby wyrównać największe momenty w belce.



Rys. 3.17a

**Rozwiązanie:**

Schemat statyczny oraz rozkłady momentów zginających w belce przedstawiono na rys. 3.17b



Rys. 3.17b

Naprężenia w niebezpiecznych miejscach, czyli skoku momentów zginających w  $\beta l$  i największej wartości momentu w  $l/2$  wynoszą

$$\sigma_{\beta} = \frac{1}{W} M_{\beta} = \frac{1}{W} \frac{ql^2}{2} (\beta - \beta^2) \quad \sigma_{l/2} = \frac{1}{W} \left( \frac{ql^2}{8} - Xc \right) - \frac{X}{F}$$

gdzie  $W$ ,  $F$ ,  $c$  są kolejno wskaźnikami wytrzymałości, przekrojem poprzecznym, ramieniem wewnętrznym w ciągnie.

Z przyrównania  $\sigma_{\beta} = \sigma_{l/2}$  wynika warunek na siłę nadliczbową  $X$

$$\frac{ql^2}{2} (\beta - \beta^2) = \frac{ql^2}{8} - Xc - X \frac{W}{F} \rightarrow X = \frac{ql^2}{2} \left( \beta^2 - \beta + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{c + \frac{W}{F}}$$

Siłę w ciągnie sprężającym  $\bar{X}$  znajdziemy jako różnicę między pełną siłą  $X$  w ciągnie, a siłą wynikającą z samonaprężenia  $X_0$ . Tą siłę wyznaczmy rozwiązując równania metody sił

$$\delta_{11} X_0 + \delta_{1p} = 0$$

Współczynniki  $\delta_{11}$  i  $\delta_{1p}$  wyznaczmy „przemnażając” wykresy sił wewnętrznych

$$\delta_{11} = \frac{\alpha l(1c)^2}{EJ} + \frac{\alpha l1}{EF} + \frac{\alpha l1}{E_a F_a}, \quad EJ\delta_{1p} = - \left[ M_\beta \alpha l + \frac{2}{3} \left( \frac{ql^2}{8} - M_\beta \right) \alpha l \right] 1c$$

Siła  $X_0$  wynikająca z samonapężenia w cięgni wynosi

$$X_0 = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{1/3M_\beta \alpha l c + \frac{ql^3 \alpha c}{12}}{J \alpha l \left( \frac{c^2}{J} + \frac{1}{F} + \frac{E}{E_a F_a} \right)} = \frac{M_\beta c + \frac{ql^2}{12} c}{\left( \frac{c^2}{J} + \frac{1}{F} + \frac{E}{E_a F_a} \right) J}$$

Wstępny naciąg cięgna, jako różnica między  $X - X_0$  wynosi więc

$$\begin{aligned} X - X_0 &= \frac{ql^2}{2} \frac{4\beta^2 - 4\beta + 1}{c + \frac{W}{F}} - \frac{ql^2}{2} \frac{(\beta - \beta^2)c + \frac{1}{6}c}{\left( \frac{c^2}{J} + \frac{1}{F} + \frac{E}{E_a F_a} \right) J} = \\ &= \frac{ql^2}{2} \left[ \frac{4\beta^2 - 4\beta + 1}{c + \frac{W}{F}} - \frac{(\beta - \beta^2)c + \frac{1}{6}c}{J \left( \frac{c^2}{J} + \frac{1}{F} + \frac{E}{E_a F_a} \right)} \right] \end{aligned}$$

W rozważaniach uwzględniliśmy jedynie liniowo sprężysty zakres pracy konstrukcji. O wiele bardziej interesująca jest analiza problemu z uwzględnieniem reologicznych własności materiału. Zwracamy tu uwagę na fakt, iż liny stalowe używane do sprężania charakteryzują się tzw. pełzaniem konstrukcyjnym wynikającym z ich budowy.